



Universidad Simón Bolívar  
Departamento de Cómputo Científico y Estadística  
Probabilidad y Estadística para Ingenieros (CO-3121)  
Enero-Marzo 2011

## Tarea 2 (10 %)

1. Si  $T$  es una v.a. continua que representa el tiempo de vida útil de algún artefacto (medido en años, meses o cualquier otra unidad), entonces el índice de falla (o rapidez de falla) es

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Demuestre que si la distribución de probabilidad de  $T$  es exponencial, entonces su índice de falla es constante. Esto corrobora la propiedad de pérdida de memoria, ya que si el índice de falla es constante, entonces el artefacto no puede recordar qué tan viejo es. En la mayoría de los artefactos, el índice de falla es al principio decreciente, luego constante durante cierto tiempo y después decreciente.

2. Un combustible para cohetes va a contener cierto porcentaje (denotado por  $X$ ) de un compuesto particular. Las especificaciones exigen que  $X$  esté entre 25 y 35 %. El fabricante tendrá una utilidad neta en el combustible (por galón) que es la siguiente:"

$$T(x) = \begin{cases} \$0,10 \text{ por galón} & \text{si } 30 < X < 35 \\ \$0,05 \text{ por galón} & \text{si } 25 < X \leq 30 \\ -\$0,10 \text{ por galón} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Si  $X \sim \mathcal{N}(33, 9)$ , calcular  $E(T)$ .
  - b) Suponga que el fabricante desea aumentar su utilidad neta esperada,  $E(T)$ , en 50 %, aumentando su utilidad (por galón) en aquellas partidas de combustible que satisfacen las especificaciones,  $30 < X < 35$ . Cuál debe ser su utilidad neta?
3. Sean  $X$  y  $Y$  las proporciones del tiempo de una semana de trabajo, durante las cuales los empleados I y II respectivamente, llevan a cabo realmente las tareas que se les asignan. El comportamiento de la frecuencia relativa conjunta  $(X, Y)$  está modelada por la función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{para } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{para las demás} \end{cases}$$

- a) Determine  $P(X < 1/2, Y > 1/4)$
  - b) Son  $X$  y  $Y$  independientes?
  - c) Calcule la probabilidad de que el empleado I pase más de 75% de la semana llevando a cabo sus tareas, dado que el empleado II pasa exactamente el 50% de la semana de trabajo cumpliendo sus obligaciones
  - d) Calcule e interprete  $E(X|Y = 1/2)$
  - e) Calcule  $Var(3X - 2Y)$
4. Dadas las variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$  con función de densidad conjunta definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{sen}(x + y) & \text{para } 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

- a) Determine el valor esperado de la variable  $X$ .
  - b) Calcular  $Var(X)$
  - c) Encuentre  $Cov(X, Y)$
  - d) Calcule el coeficiente de correlación entre  $X$  y  $Y$ ,
5. Sean  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  variables aleatorias exponencialmente distribuidas e independientes con media  $\beta$ .
- a) Demuestre que  $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  tiene una distribución exponencial, con media  $\beta/n$
  - b) Si  $n = 5$  y  $\beta = 2$ , encuentre  $P(Y_{(1)} \leq 3,6)$
6. Sean  $X$  y  $Y$  las variables aleatorias independientes con la misma función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para las demás } x \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad conjunta para las variables aleatorias  $U = X + Y$  y  $V = e^X$ .

7. Se tienen  $n$  voltajes  $V_1, V_2, \dots, V_n$  que se reciben en una especie de concentrador (sumador), de forma tal que  $V = \sum V_i$  es la suma de los voltajes recibidos en ese punto. Cada voltaje  $V_i$  es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo  $[0, 10]$ . Si  $n = 20$ , use el teorema del límite central para calcular la probabilidad de que el voltaje total de entrada sobrepase los 105 voltios.
8. Un plan de control de calidad exige seleccionar aleatoriamente tres artículos provenientes de la línea de producción diaria (supuestamente grande) de cierta máquina y observar el número de artículos defectuosos. No obstante, la proporción  $p$  de artículos defectuosos producidos por la máquina varía de un día a otro y se supone que tiene una distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ .

- a) Para un día escogido aleatoriamente, encuentre la probabilidad incondicional de que se observen exáctamente dos artículos defectuosos en la muestra.
  - b) Encuentre el número esperado de artículos defectuosos observado entre los tres artículos muestreados.
  - c) Encuentre la varianza del número de artículos defectuosos observado entre los tres muestreados
9. Se sabe que el número de defectos por yarda  $Y$  para cierta tela tiene una distribución de Poisson, con parámetro  $\lambda$ . No obstante,  $\lambda$  es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por

$$f(\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda} & \text{para } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

- a) Encuentre la función de probabilidad incondicional para  $Y$ .
- b) Encuentre el número esperado de defectos por yarda hallando primero el valor condicional de  $Y$  para una  $\lambda$  dada.
- c) Encuentre la varianza de  $Y$ .
- d) Es probable que  $Y$  exceda de 9?

## Evaluación:

La nota en la tarea (10%) corresponderá a la revisión de un sólo ejercicio de los XX asignados. El ejercicio a evaluar se escogerá de manera aleatoria después de la entrega de la tarea. Cada violación a las reglas especificadas abajo tendrá una penalización de 1 punto.

## Reglas:

1. La tarea debe ser entregada en grupos de 3 personas. Todos los integrantes deben cursar la materia con el mismo profesor.
2. Sea ordenado y limpio. Escriba con letra legible y clara. Los ejercicios deben ser escritos con lápiz o portaminas oscuro.
3. Entregue la tarea engrapada, en hojas blancas tamaño carta y con los problemas ordenados numéricamente.
4. Cada ejercicio nuevo debe empezar en una página diferente. Cada hoja debe estar numerada arriba a la derecha y se debe escribir por las dos caras, es decir, ambas caras deben estar resueltas. No puede haber páginas blancas. Cada página en blanco vale 0.5 punto menos. Si su grupo decide no hacer un ejercicio, tiene que dejar la página correspondiente a dicho ejercicio en blanco.

5. El número del ejercicio, al inicio de cada página, debe ser escrito en bolígrafo azul o negro, y en mayúsculas, al comienzo de cada página. Por ejemplo: EJERCICIO 1. Seguidamente debe venir el enunciado de dicho ejercicio (en lápiz o portaminas, no bolígrafo ni marcador).
6. Incluya una portada con el nombre completo y número de carnet de cada integrante del grupo.

**Fecha tope de entrega:**

viernes de la semana 11, antes de presentar el segundo parcial